ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ (13/3/2016)

ΘΕΜΑ 1ο:

Α) σελ. 261 και 275 σχολικού

Β) σελ 253 σχολικού

Γ) 1. ΛΑΘΟΣ 2. ΛΑΘΟΣ 3. ΛΑΘΟΣ 4. ΣΩΣΤΟ 5. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο:

1. $x f(x) + x^3 = 2x^3 \ln x \Leftrightarrow x \cdot f(x) = 2x^3 \ln x - x^3 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} \boxed{f(x) = 2x^2 \ln x - x^2}$

Για $x=0$ αφού η f συνεχής στο $x=0$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2 \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\ln x}{\frac{1}{x^2}} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{2}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x^2) = 0$

Έτσι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(2x^2\ln x - x^2) = 0$ άρα $\boxed{f(0)=0}$ οπότε $\boxed{f(x) = \begin{cases} 2x^2\ln x - x^2, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}}$

2. $f'(x) = 4x\ln x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} - 2x = 4x \ln x$

x		0		1	
f'		‖	$-$	0	$+$
f		‖	↘		↗

οπότε η $f \downarrow [0,1]$ και $f \uparrow [1,+\infty)$

ολικό ελάχιστο $f(1) = -1$

$A_1 = [0,1] \xrightarrow{f\downarrow} f(A_1) = [f(1), f(0)] = [-1, 0]$

$A_2 = [1,+\infty) \xrightarrow{f\uparrow} f(A_2) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [-1,+\infty)$

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-1,+\infty)$

$\blacktriangleright \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2\ln x - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2(2\ln x - 1)\right] = +\infty$

3. $f''(x) = 4\ln x + 4x \cdot \frac{1}{x} = 4(\ln x + 1)$

x		0		$1/e$	
f''		‖	$-$	0	$+$
f		‖	∩		∪

Η f κοίλη $[0, 1/e]$ και f κυρτή $[\frac{1}{e}, +\infty)$

Σημείο καμπής $A(\frac{1}{e}, f(\frac{1}{e})) \Rightarrow A(\frac{1}{e}, \frac{-3}{e^2})$

4. $E = \int_1^e |f(x) - g(x)| dx = \int_1^e |2x^2\ln x - x^2 - (-x^2)| dx = \int_1^e |2x^2 \ln x| dx \overset{x\geq 1}{=} \int_1^e 2x^2 \ln x \, dx =$

$= \int_1^e \left(\frac{2x^3}{3}\right)' \ln x \, dx = \left[\frac{2x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{2x^3}{3}\cdot\frac{1}{x} dx = \frac{2e^3}{3} - \frac{2}{9}\left[x^3\right]_1^e = \frac{2e^3}{3} - \frac{2e^3}{9} + \frac{2}{9}$

$\Leftrightarrow \boxed{E = \frac{4e^3+2}{9}}$

5. $\frac{1}{(x-6)^2} = 1 - 2\ln(x-6) \Leftrightarrow 1 = (x-6)^2 - 2(x-6)^2 \ln(x-6) \Leftrightarrow 2(x-6)^2 \ln(x-6) - (x-6)^2 = -1$

$\Leftrightarrow f(x-6) = -1 \xrightarrow[\text{ελάχιστο}]{\text{θέση ολικού}}$ άρα $x-6 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x=7}$

ΘΕΜΑ 3ο:

1. (ΣΕΛΙΔΑ 278 ΣΧΟΛΙΚΟΥ)

$f(x)=2e^{x-a}-x^2$, $f'(x)=2e^{x-a}-2x$, $f''(x)=2(e^{x-a}-1)$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow e^{x-a}>1 \Leftrightarrow x-a>0 \Leftrightarrow x>a$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Άρα μοναδικό σημείο καμπής το $A(a,f(a)) \Rightarrow \boxed{A(a,2-a^2)}$

Αν $x=a$ και $y=2-a^2$ τότε $y=2-x^2$ οπότε το A πάνω στην $y=2-x^2$.

2. Από υπόθεση $f'(1)=0 \Leftrightarrow 2e^{1-a}-2=0 \Leftrightarrow e^{1-a}=1 \Leftrightarrow \boxed{a=1}$

3. α. $f(x)=2e^{x-1}-x^2$, $f'(x)=2e^{x-1}-2x$, $f''(x)=2(e^{x-1}-1)$

οπότε

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

άρα $f'(x)\geq f'(1)=0$ έτσι η $f(x)$ $\nearrow$

ΣΕΛΙΔΑ 250 ΣΧΟΛΙΚΟΥ

3. β. Από ΘΜΤ για την $g(x)$ στο $[1,5]$ $\exists\, \xi\in(1,5)$: $g'(\xi)=\frac{g(5)-g(1)}{5-1}$

όμως από υπόθεση $-2<g'(x)\leq -1/2$ οπότε για $x=\xi$ ισχύει

$-2<\frac{g(5)-g(1)}{5-1}\leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -8<-1-g(1)\leq -2 \Leftrightarrow -7<-g(1)\leq -1$

$\Leftrightarrow \boxed{1\leq g(1)<7}$. (*)

3. γ. Έστω $\kappa(x)=f(x)-g(x)=2e^{x-1}-x^2-g(x)$

Η $\kappa(x)$ συνεχής στο $[1,5]$ ως πράξεις συνεχών (g συνεχής ως παραγωγίσιμη)

$\kappa(1)=2e^0-1-g(1)=1-g(1)\leq 0$ από (*)

$\kappa(5)=2e^4-25-g(5)=2e^4-25+1=2(e^4-12)>0$ (αφού $e>2 \Leftrightarrow e^4>16$)

Έτσι $\kappa(1)\cdot\kappa(5)\leq 0$ {
I) Αν $\kappa(1)\cdot\kappa(5)=0 \overset{\kappa(5)>0}{\Longleftrightarrow} \kappa(1)=0$ άρα $x=1$ πιθανή ρίζα
II) Αν $\kappa(1)\kappa(5)<0$ από Θ.Bolzano $\exists\, x_0\in(1,5)$: $\kappa(x_0)=0$

Συνολικά $\exists\, x_0\in[1,5)$: $\kappa(x_0)=0$

$\kappa'(x)=f'(x)-g'(x)>0$ αφού από (3α) $\Rightarrow f'(x)\geq 0$ και από υπόθεση $g'(x)<0$

έτσι η $\kappa(x)$ $\nearrow$ Συνεπώς το σημείο τομής μεταξύ C_f, C_g μοναδικό στο $[1,5)$

3β. $h(x)=g(x)+2x$ οπότε $h'(x)=g'(x)+2>0$ άρα η $h(x)\uparrow$

$1\le x\le 5 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(1)\le h(x)\le h(5) \Leftrightarrow g(1)+2 \le g(x)+2x \le g(5)+10$

$\Leftrightarrow g(1)+2-2x\le g(x) \le 9-2x$ τότε $\int_1^5 (g(1)+2-2x)\,dx \le \int_1^5 g(x)\,dx \le \int_1^5 (9-2x)\,dx$

$\Leftrightarrow \left[g(1)x+2x-x^2\right]_1^5 \le \int_1^5 g(x)\,dx \le \left[9x-x^2\right]_1^5 \Leftrightarrow \boxed{4g(1)-16 \le \int_1^5 g(x)\,dx \le 12}$

ΘΕΜΑ 4ο

1. $x f'(x) = x f(x) - f(x) \Leftrightarrow x\cdot f'(x)+f(x) = x\cdot f(x) \Leftrightarrow (x\cdot f(x))' = x\cdot f(x)$

άρα $\exists\, c\in\mathbb{R}$: $x f(x) = c\, e^x \xrightarrow{x=1/2} \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{e} = c\sqrt{e} \Leftrightarrow \boxed{c=1}$

Έτσι $x f(x) = e^x \overset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} \boxed{f(x)=\frac{e^x}{x}}$

2. $f'(x) = e^x\,\frac{x-1}{x^2}$

x		0		1	
$f'(x)$	$-$	||	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$		$\nearrow$

Η $f\downarrow(-\infty,0)$ και στο $(0,1]$
Η $f\uparrow[1,+\infty)$

• $A_1=(-\infty,0) \xrightarrow{f\downarrow} f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (-\infty,0)$

▶ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

▶ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$

• $A_2=(0,1] \xrightarrow{f\downarrow} f(A_2)=\left[f(1),\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = [e,+\infty)$

• $A_3=[1,+\infty) \xrightarrow{f\uparrow} f(A_3)=\left[f(1),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = [e,+\infty)$

▶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$f(A) = f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3) = (-\infty,0)\cup[e,+\infty)$.

Η εξίσωση $x-\ln x=\ln a \Leftrightarrow x=\ln x+\ln a \Leftrightarrow x=\ln(ax) \Leftrightarrow e^x = ax \Leftrightarrow \frac{e^x}{x}=a$

$\Leftrightarrow f(x)=a$ με $a>0$.

• Αν $a\in(0,e)$ τότε $a\notin f(A)$ οπότε η εξίσωση δεν παρουσιάζει λύσεις

• Αν $a=e$ τότε $f(x)=a$ έχει μοναδική λύση $x=1$ (ολικό ελάχιστο)

• Αν $a\in(e,+\infty)$ τότε $a\in f(A_2), f(A_3)$ οπότε από ΘΕΤ $\exists\, x_2, x_3$: $f(x_2)=f(x_3)=a$ με $x_2\in A_2$ και $x_3\in A_3$ άρα δύο λύσεις.

3. $f(ln^3x) = 2e - \frac{x}{lnx} \Leftrightarrow f(ln^3x) = 2e - f(lnx)$

$f(ln^3x) + f(lnx) = 2e$

όμως για $x>1$ $\left\{\begin{array}{l} lnx > 0 \\ \text{και} \\ ln^3x > 0 \end{array}\right\}$ και για $x>0$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το e.

Έτσι πρέπει $\left\{\begin{array}{l} f(ln^3x) = e \Leftrightarrow ln^3x = 1 \Leftrightarrow x = e \\ f(lnx) = e \Leftrightarrow lnx = 1 \Leftrightarrow x = e \end{array}\right\} \boxed{x=e}$

4. $\int_1^x \frac{e^t(t-1)\cdot f(f(t))}{t^2}dt = \int_1^x \frac{e^t(t-1)}{t^2}\cdot f(f(t))\,dt = \int_1^x f'(t)\cdot F'(f(t))\,dt$

$= [F(f(t))]_1^x = F(f(x)) - F(f(1)) = F(f(x)) - F(e) = F(f(x)) - 1.$

Έτσι η ζητούμενη εξίσωση: $F(f(x)) - 1 = 2 \Leftrightarrow F(f(x)) = 3$

$F'(x) = f(x) > 0$ για $x>0 \Rightarrow F(x)$ ↗ και "1-1" άρα $F(f(x)) = 3 = F(e + 1/3)$

$\Leftrightarrow f(x) = e + 1/3$

Ισχύει $e + 1/3 \in f(A_2), f(A_3) \xrightarrow{\Theta ET} \exists\, x_1 \in A_2$ και $x_2 \in A_3$: $f(x_1) = f(x_2) = e + \frac{1}{3}$

οπότε η εξίσωση 2 ρίζες.

5. εφ: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ αρκεί το K να την επαληθεύει:

$e + \frac{1}{3} - f(x_0) = -x_0 f'(x_0)$

Είναι $x\cdot f'(x) - f(x) + (e + 1/3) = 0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} + \frac{e + 1/3}{x^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{e + 1/3}{x}\right)' = 0$

Έστω $\varphi(x) = \frac{f(x) - e - 1/3}{x}$

Για $x = x_1$: $\varphi(x_1) = 0$
Για $x = x_2$: $\varphi(x_2) = 0$ $\xrightarrow{\Theta.Rolle} \exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$: $e + \frac{1}{3} - f(x_0) = -x_0 f'(x_0)$.